| **V-52** (25 min) 13-junio-2019<br>Resumen de Miguel Cañizares | **Acción de Hilbert-Einstein (1)**<br>**Deducción fórmula de variación de la raíz del determinante de la métrica** |
|---|---|

**Planing**: En videos sucesivos se deducirá las Ecuaciones de Campo de Einstein, utilizando un principio de mínima acción y la llamada "Acción de Hilbert-Einstein". Este enfoque no es el original que hizo Einstein.
Aspecto de la Acción de Hilbert-Einstein: $\boldsymbol{s[g] = \int d^4x \sqrt{-g} \cdot R}$
Aspecto de las ecs. Campo de Einstein: $\boldsymbol{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0}$

**Deducción de la fórmula de la variación de la raíz del (menos) determinante de la métrica**: $\boldsymbol{\delta\sqrt{-g}}$
Supongamos la función de 3 variables siguiente: $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$

Utilizando desarrollo de Taylor hasta primer orden (así se hace en el video) o diferenciándola, obtenemos su variación al desplazar ligeramente ($x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$) un punto de ella: $\delta\sqrt{xyz} = \frac{\sqrt{xyz}}{2}\left(\frac{1}{x}\delta x + \frac{1}{y}\delta y + \frac{1}{z}\delta z\right)$
Fácilmente se generaliza a ***n*** variables:

$$\delta\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} = \frac{\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\delta x_i \qquad \text{(I)}$$

Consideremos ahora la matriz Métrica de un espacio n-dimensional: $g = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}$
Sabemos que es simétrica ($g_{ij} = g_{ji}$) y, por lo tanto diagonalizable, luego expresada en su base propia se pone:
$g = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ y su determinante (no depende de la base), siempre será: $\det g = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ siendo $\lambda_i$ los valores propios. En caso de métrica en variedad espacial (sin tiempo): ***det g > 0***

Podemos utilizar la expresión (I) y poner: $\delta\sqrt{\det g} = \frac{\sqrt{\det g}}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1}\delta\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2}\delta\lambda_2 + \cdots \frac{1}{\lambda_n}\delta\lambda_n\right)$

Sabemos que la inversa de la matriz diagonal es: $g^{-1} = \begin{bmatrix} {\lambda_1}^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & {\lambda_n}^{-1} \end{bmatrix}$
También sabemos (V-2) que cualquier matriz inversa es la misma pero expresada en la base dual: $(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$
A los elemento de la matriz (g) diagonalizada (valores propios): $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ los nombraremos por su notación más general: $g_{11}, g_{22} \dots g_{nn}$ . Entonces, la expresión obtenida anteriormente, puede ponerse:

$$\delta\sqrt{\det g} = \frac{\sqrt{\det g}}{2}\left(\frac{1}{g_{11}}\delta g_{11} + \frac{1}{g_{22}}\delta g_{22} + \cdots \frac{1}{g_{nn}}\delta g_{nn}\right) = \frac{\sqrt{\det g}}{2}(g^{11}\delta g_{11} + g^{22}\delta g_{22} + \cdots g^{nn}\delta g_{nn})$$

Con la matriz métrica (g) expresada en forma diagonal, utilizando el criterio de sumatorio de Einstein, se podría compactar la expresión poniendo: $\delta\sqrt{\det g} = \frac{\sqrt{\det g}}{2} g^{\alpha\alpha}\delta g_{\alpha\alpha}$

En el video se justifica (apelando al carácter tensorial de los sumandos) que, aún en el caso de que la matriz (g) no esté expresada en forma diagonal y tenga elementos del tipo $g^{\alpha\beta}$ (con $\alpha$ igual o distinto de $\beta$) la expresión anterior se puede generalizar, para una variedad sólo espacial en la que ***det g > 0***:

$$\boldsymbol{\delta\sqrt{\det g} = \frac{\sqrt{\det g}}{2} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}} \qquad \textbf{(II)}$$

En una variedad de espacio-tiempo ***det g < 0***, por lo que lo consideramos con un signo menos: ***-det g*** > 0.
Además abreviamos la notación del determinante ***det g ≡ g*** y se pone:

$$\boldsymbol{\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}} \qquad \textbf{(III)}$$

Para el cambio de signo consideramos: $g^{\alpha\beta} = 1/g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta g_{\alpha\beta} = \delta(1/g^{\alpha\beta}) = -\delta g^{\alpha\beta} / (g^{\alpha\beta})^2 = -(g_{\alpha\beta})^2 \delta g^{\alpha\beta} \rightarrow g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$